SESSION DE 1975

CONCOURS B

ÉPREUVE DE CALCUL NUMÉRIQUE

DURÉE : 3 heures. — COEFFICIENT : 2

N. B. — *Les quatre parties du problème peuvent être traitées indépendamment en supposant acquis les résultats des parties précédentes (sauf la seconde moitié des questions* III. 2° *et* IV. 3°).

Les candidats sont invités à reporter leurs résultats numériques dans le tableau donné en fin de texte *et à joindre* (par agrafe ou scotch) *ce tableau à leur copie, sans mentionner leur identité.*

Soit f une fonction de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ telle que l'équation

(1) $$f(x) = 0 , \qquad x \in \mathbf{R}$$

ait au moins une racine $x = a$.

Pour résoudre l'équation (1), on se donne une première estimation x_0 de la racine a et on introduit la méthode itérative :

(2) $$x_{k+1} = g(x_k) , \qquad k = 0, 1, 2, \ldots$$

où g est une fonction de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ définie par

(3) $$g(x) = x - mf(x) , \qquad m \neq 0 .$$

I. ÉTUDE DE LA MÉTHODE ITÉRATIVE

On suppose que l'hypothèse suivante sur la fonction g est réalisée.

Hypothèse H : il existe un intervalle $\mathfrak{I} =]\, a - h,\ a + h\,[$, $h > 0$ et une constante $\lambda \in]\, 0, 1\,[$ tels que pour tout $x \in \mathfrak{I}$:

(4) $$|\, g(x) - a\,| \leqslant \lambda\, |\, x - a\,| .$$

On suppose aussi que la première estimation x_0 est choisie dans l'intervalle $\mathfrak{I}$.

question III. 2° question IV. 3°

$a =$

$\Delta =$

question II. 3°

k	$\cos(x_{k-1})$	$\sin(x_{k-1})$	$-2\sin(x_{k-1})$	$f(x_{k-1})$	$-mf(x_{k-1})$	x_k	$\lvert x_k - a \rvert$
0							
1							
2							
3							
4							

Auteur de la table numérique utilisée :

1° Démontrer par récurrence, que tous les x_k sont dans l'intervalle $\mathfrak{I}$.

2° Établir que :

(5) $$|x_k - a| \leqslant \lambda^k |x_0 - a|$$

et en déduire que la suite (x_k) converge vers a.

3° Montrer que a est l'unique racine de l'équation (1) dans l'intervalle $\mathfrak{I}$.

II. CALCUL DE LA SOLUTION APPROCHÉE

On considère la fonction :

(6) $$f(x) = \cos x - 2 \sin x + 1 .$$

Pour cette fonction f, l'équation (1) admet une racine a dans l'intervalle $]\,0, \frac{\pi}{2}[$.

1° Démontrer que la fonction g définie par (3) avec $m = -\frac{1}{2}$ et f donnée par (6) a une dérivée continue g' vérifiant :

(7) $$|g'(x)| \leqslant \frac{1}{2}, \quad \text{pour tout} \quad x \in]\,0, \frac{\pi}{2}[.$$

2° On choisit x_0 dans l'intervalle $\mathfrak{I} =]\,a - h,\ a + h[$, h désignant le plus petit des deux nombres positifs a et $\frac{\pi}{2} - a$.

Déduire des résultats précédents que la suite (x_k) converge vers a et que a est l'unique racine de l'équation (1) dans l'intervalle $\mathfrak{I}$.

3° En partant de $x_0 = \frac{\pi}{4}$, calculer les valeurs x_k (en radians), $k = 0$, 1, 2, 3, 4 à l'aide de la méthode (2) en tolérant, à chaque itération, une erreur d'arrondi inférieure à $\delta = 0{,}5 \times 10^{-3}$. La convergence semble-t-elle rapide?

III. CALCUL DE LA SOLUTION EXACTE

1° Résoudre exactement l'équation (1) avec f donnée par (6).

Vérifier que cette équation n'a qu'une racine dans l'intervalle $]\,0, \frac{\pi}{2}[$, que l'on notera a. Quelle est la valeur de $g'(a)$?

2° Calculer, à moins de $0{,}5 \times 10^{-4}$ près, la racine a et à $\delta = 0{,}5 \times 10^{-3}$ près les erreurs $|x_k - a|$, $k = 0, 1, 2, 3, 4$.

La valeur de $g'(a)$ peut-elle expliquer l'évolution des erreurs?

IV. ÉVALUATION A PRIORI DES ERREURS

On veut maintenant tenir compte du fait que les x_k ne sont pas calculés exactement.

La méthode itérative effectivement mise en œuvre s'écrit :

(8) $$X_{k+1} = g(X_k) + \delta_k , \qquad k = 0, 1, 2, \ldots$$

où les X_k sont les valeurs numériques réellement obtenues pour les x_k et les δ_k (erreurs d'arrondi) sont telles que :

(9) $$|\delta_k| \leqslant \delta .$$

On suppose que g satisfait à l'hypothèse H de la partie I et que

$$\delta \leqslant (1 - \lambda)\, h .$$

On choisit une première estimation X_0 dans l'intervalle

$$\mathfrak{I}^* =]\,a - h^*\ ,\ a + h^*[$$

avec

(10) $$h^* = h - \frac{\delta}{1 - \lambda} .$$

1° Démontrer que tous les X_k sont dans l'intervalle $\mathfrak{I}$.

2° Établir que :

(11) $$|X_k - a| \leqslant \frac{\delta}{1 - \lambda} + \lambda^k \left(h^* - \frac{\delta}{1 - \lambda}\right)$$

et en déduire que lorsque $k \longrightarrow \infty$, X_k approche la racine a avec l'incertitude $\Delta = \frac{\delta}{1 - \lambda}$.

Que peut-on dire de la précision de la méthode lorsque λ est proche de l'unité?

3° Calculer l'incertitude Δ dans le cas des calculs numériques de la partie II et la comparer aux résultats de la question III. 2°.

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail